جامعة البعث	امتحان مقرر تحليل المتجهات ر	الاسم :
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية (ر)	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨	التوقيت : ١١-١٢،٣٠

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (25 درجة)

لتكن لدينا المتجهات $\overline{A}=\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ ، $\overline{B}=\overline{i}+3\overline{j}+5\overline{k}$ ، $\overline{C}=2\overline{i}+\overline{j}-4\overline{k}$ والمطلوب أوجد:

١) $\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})$ ، تحقق هل المتجهات الثلاثة مرتبطة خطيا ؟ ثم استنتج حجم متوازي السطوح الذي أضلاعه $\overline{A}\ ,\overline{B}\ ,\overline{C}$.

٢) $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ ، متجه الواحدة الموازي للمتجه $\overline{B}\times\overline{C}$.

٣) أوجد $Broj\ \overline{B}/\overline{A}$ (مسقط $\overline{B}$ على $\overline{A}$)

السؤال الثاني :(30 درجة)

١) بفرض $\overline{F}(x,y,z)=x^2y\,\overline{i}-2y^2z^3\,\overline{j}+xyz\,\overline{k}$ حقلا متجها والمطلوب أوجد :
$rot\,\overline{F}$ ، $grad\,(div\,\overline{F})$ ، $div\,\overline{F}$

٢) أوجد المشتق الموجه للدالة $f\,(x,y,z)=x^2y+z$ وفق المنحى $\overline{A}=3\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$

٣) استنتج متجه السرعة $\overline{v}(t)$ والتسارع $\overline{a}(t)$ لنقطة مادية في الاحداثيات الاسطوانية (r,θ,z).

السؤال الثالث :(45 درجة)

ليكن المنحني المعطى بالمعادلة المتجهه $\overline{r}(t)=(1+t^2,t,t^3)$ والمطلوب :

١) إثبت أن المنحني نظامي ، أوجد تقوسه والتفافه في النقطة الموافقة للوسيط $t=0$.

٢) اوجد المتجهين $\overline{B},\overline{T}$ للمنحني السابق ، ثم أوجد معادلة المستوي المماس للمنحني في النقطة الموافقة للوسيط $t=1$.

٣) عرف ناشر منحن ، ثم أوجد معادلة ناشر المنحني السابق .

مع تمنياتي بالتوفيق
حمص في ٢٠١٨/١/١٥

مدرسا المقرر : أ.د. سامي الحسين
أ.د. محسن شيحة

حل

دليل نموذجية لمقرر تحليل المتجهات لطلاب السنة الثانية رياضيات 2 للفصل الأول (2017 - 2018)

الجواب الأول: $(15+5+5) = 25$

1) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12-20+1-[6+8+5] = -31-19 = -50 \neq 0$

المتجهات غير مرتبطة خطياً وحجم متوازي السطوح يساوي $|-50| = 50$

2)

$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-12-5)\vec{i} + (10+4)\vec{j} + (1-6)\vec{k} = -17\vec{i} + 14\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -17 & 14 & -5 \end{vmatrix} = (10-14)\vec{i} + (-17+5)\vec{j} + (14-34)\vec{k} = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 20\vec{k}$

3)

$\vec{u}_{\vec{B}\times\vec{C}} = \frac{\vec{B}\times\vec{C}}{|\vec{B}\times\vec{C}|} = \frac{-17\vec{i}+14\vec{j}-5\vec{k}}{\sqrt{(17)^2+(14)^2+(5)^2}} = \frac{1}{510}(-17\vec{i}+14\vec{j}-5\vec{k})$

$\text{Proj}\ \vec{B}/\vec{A} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{1(1)-2(3)+1(5)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$

الجواب الثاني: $(15+5+10)$

1) $\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 4yz^3 + xy = 3xy - 4yz^3$

$\text{grad}(\text{div}\,\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\text{div}\,\vec{F})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\text{div}\,\vec{F})\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\text{div}\,\vec{F})\vec{k}$

$= 3y\vec{i} + (3x-4z^3)\vec{j} - 12yz^2\vec{k}$

2) $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2y^2z^3 & xyz \end{vmatrix} = (xz+6y^2z^2)\vec{i} - yz\vec{j} - x^2\vec{k}$

$df/d\vec{A} = \text{grad}f\cdot\vec{u}_{\vec{A}} = [2xy\,\vec{i} + x^2\vec{j} + \vec{k}]\ \frac{1}{14}[3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}]$

$= \frac{1}{14}[6xy - 2x^2 + 1]$

3) لدينا متجه الموضع في الإحداثيات الاسطوانية يكتب على النحو

$\vec{R}(t) = r(t)\vec{I} + z(t)\vec{k}$ حيث $\vec{I} = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$ وبالتالي متجه السرعة ومتجه التسارع

$\vec{v}(t) = r'\vec{I} + r\theta'\vec{J} + z'\vec{k}$

$\vec{a}(t) = (r'' - r\theta'^2)\vec{I} + (r'\theta' + r\theta'')\vec{J} + z''\vec{k}$

$\vec{r}(t) = (1+t^2, t, t^3) \Rightarrow \vec{r}'(t) = (2t, 1, 3t^2) \rightarrow$ 10+15+15 ثالثاً

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9t^4+4t^2+1} \neq 0, \ \vec{r}(t) \in C^\infty \Rightarrow$ المنحني نظامي

$K(t) = \dfrac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}, \quad \tau(t) = \dfrac{(\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0), \vec{r}'''(t_0))}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$

$\vec{r}'(t_0) = (0,1,0), \ \vec{r}'' = (2,0,6t) \Rightarrow \vec{r}''|_{t=0} = (2,0,0)$

$\vec{r}''' = (0,0,6) \Rightarrow \vec{r}' \times \vec{r}''|_{t=0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k}, \ (\vec{r}' \times \vec{r}'')_{t=0} = , \ K(t) = \dfrac{1+2t}{1} = 2$

$(\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0), \vec{r}'''(t_0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12$

$\Rightarrow \tau(t_0) = \dfrac{-12}{+4} = -3$

$\vec{T} = \dfrac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \dfrac{(2t, 1, 3t^2)}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}}, \quad \vec{B} = \dfrac{(\vec{r}' \times \vec{r}'')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \dfrac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix}}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \dfrac{6t\vec{i} - 6t^2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}$

معادلة المستوي المماس

$6(x-x_0) - 6(y-y_0) - 2(z-z_0) = 0$

$6(x-2) - 6(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow 6x - 6y - 2z + 20 = 0$

3) ناشر منحني هو منحني نقطة r_1 تتحرك على المنحني r_1 على ماسات المنحني تقطع الناشر عمودياً. معادلة الناشر هي:

$\vec{R}^* = \vec{R} + (C - S)\vec{T}$

حيث $\vec{T}$ شعاع واحدة المماس للمنحني، $\vec{R}$ معادلة المنحني، C ثابت، S الوسيط الطبيعي.

$R^* = (1+t^2, t, t^3) + (C - S(t)) \dfrac{(2t, 1, 3t^2)}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}}$

$\Rightarrow R^* = \left(1+t^2 + \dfrac{(C-S(t))2t}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}}, \ \dfrac{t + (C-S(t))}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}}, \ t^3 + \dfrac{3(C-S(t))t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right)$

انتهت الاجوبة. د. محمد ...